

RECHERCHES

SUR LA

LOI DES OSCILLATIONS DU PENDULE

A SUSPENSION A LAMES DES CHRONOMÈTRES FIXES,

PAR M. H. RÉSAL,

INGÉNIEUR AU CORPS IMPÉRIAL DES MINES, DOCTEUR ÈS-SCIENCES.

EXTRAIT DES MÉMOIRES DE LA SOCIÉTÉ D'ÉMULATION DU DOERS.

(Séance du 9 février 1856.)

BESANÇON,

IMPRIMERIE D'OUTHENIN-CHALANDRE FILS.

rue des Granges, n° 23.

1856.



AZL 14349

RECHERCHES

SUR LA

LOI DES OSCILLATIONS DU PENDULE

A SUSPENSION A LAMES

DES CHRONOMÈTRES FIXES.

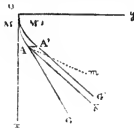


Depuis un certain nombre d'années, on préfère généralement, pour le pendule régulateur des chronomètres fixes, le mode de suspension à lames, à l'emploi des couteaux qui offrent l'inconvénient de produire une usure rapide des surfaces en contact, en donnant lieu à des frottements appréciables.

Le rôle que joue l'élasticité des lames dans ce mode de suspension, me paraissant n'avoir été étudié jusqu'ici que sous le rapport expérimental, j'ai cherché à m'en rendre compte, en m'appuyant sur la théorie ordinaire de la flexion des verges, où l'on fait abstraction, comme on le sait, des glissements transversaux qui d'ailleurs sont très-petits et négligeables dans la plupart des cas.

Je considérerai, d'abord, la suspension comme formée d'une seule lame, perpendiculaire au plan d'oscillation et encastrée par son extrémité supérieure, et suivant une horizontale, dans une pince fixe, et par l'autre, dans la masse qui constitue le pendule.

Je supposerai, de plus, afin de ne pas m'éloigner des conditions ordinaires de l'application, que, dans l'état de repos du pendule, la perpendiculaire abaissée de son centre de gravité sur l'horizontale ci-dessus est un axe de figure, dont le prolongement coïncide avec celui de la lame.



Enfin, comme la masse du pendule est incomparablement plus grande que celle de la lame, il n'y a pas lieu de tenir compte de l'inertie et du poids de cette dernière.

Si, par le milieu O de l'horizontale d'encastrement, je mène la verticale ox , dans le sens de la pesanteur, et l'horizontale Oy , perpendiculaire aux deux droites précédentes, d'après ce qui précède, le

plan xOy sera constamment et pendant le mouvement un plan de symétrie pour la lame et la masse du pendule.

Soient, à un instant quelconque, correspondant au temps t ,

OA la forme curviligne affectée par la lame, tangente en O à Ox ;

AG l'axe de figure du pendule tangent en A à la courbe OA ;

M un point intermédiaire de la courbe AO ;

G le centre de gravité du pendule;

A', M', G' , les positions que prendront respectivement les points A, M, G au bout de l'élément du temps dt ;

x, y les coordonnées du point M ;

x_1, y_1 celle du point A ;

α l'angle d'inclinaison sur Ox de la tangente en M , donné par $\tan \alpha = \frac{dy}{dx}$;

α_1 la valeur de α pour le point A ;

$AG = A'G' = l$;

P le poids du pendule;

I le moment d'inertie du pendule par rapport à l'horizontale en A , perpendiculaire à xOy ;

m la projection sur le plan xOy , d'une molécule de masse m du pendule;

r la distance Am des points A et m ;

$\pm \delta$ l'angle constant, formé r avec AG , en prenant le signe $+$ ou le signe $-$, selon que r sera situé à droite ou à gauche de AG ;

E le coefficient de l'élasticité de la lame;

n sa section;

μ le moment d'inertie de cette section par rapport à un axe perpendiculaire au plan d'oscillation xOy , passant par son centre de gravité;

ρ le rayon de courbure de la lame en M ;

s l'arc curviligne AM variable avec le temps;

σ la valeur de s dans l'état naturel de la lame;

s_1 et σ_1 les valeurs de s et de σ relatives au point A .

Il est clair que le déplacement du pendule de AG en $A'G'$ peut être considéré comme résultant de la composition de deux autres déplacements : l'un de rotation autour de A , ayant pour effet d'amener AG dans la direction de la parallèle AK à AG ; et l'autre de translation parallèle à AA' en vertu duquel AK viendra coïncider avec $A'G'$.

Les composantes parallèles aux axes Ox et Oy de la vitesse de translation sont évidemment

$$\frac{dx_1}{dt}, \quad \frac{dy_1}{dt}.$$

La vitesse angulaire autour de A étant $\frac{d\alpha_1}{dt}$, la vitesse correspondante du point m a pour expression $r \frac{d\alpha_1}{dt}$; et comme elle est perpendiculaire à r qui fait avec Ox l'angle $\alpha_1 \pm \delta$, ses projections sur Ox et Oy sont respectivement :

$$\begin{aligned} -r \frac{d\alpha_1}{dt} \sin (\alpha_1 \pm \delta) &= \frac{d \cos \alpha_1}{dt} r \cos (\pm \delta) - \frac{d \sin \alpha_1}{dt} r \sin (\pm \delta) \\ r \frac{d\alpha_1}{dt} \cos (\alpha_1 \pm \delta) &= \frac{d \sin \alpha_1}{dt} r \cos (\pm \delta) + \frac{d \cos \alpha_1}{dt} r \sin (\pm \delta). \end{aligned}$$

Il résulte de là que la force d'inertie de la masse m est en projection sur les axes Ox et Oy

$$(a) \quad -m \frac{d^2 x_1}{dt^2} - \frac{d^2 \cos \alpha_1}{dt^2} \cdot mr \cos (\pm \delta) + \frac{d^2 \sin \alpha_1}{dt^2} mr \sin (\pm \delta).$$

$$(b) \quad -m \frac{d^2 y_1}{dt^2} - \frac{d^2 \sin \alpha_1}{dt^2} \cdot mr \cos (\pm \delta) - \frac{d^2 \cos \alpha_1}{dt^2} mr \sin (\pm \delta).$$

Si l'on remarque que d'après la propriété du centre de gravité, on a $\Sigma mr \cos \delta = \frac{P}{g} l$, $\Sigma mr \sin \pm \delta = 0$, et que l'on fasse la somme de toutes les expressions (a) et celle des expressions (b), on trouve pour la force d'inertie totale,

En projection sur Ox :

$$-\frac{P}{g} \frac{d^2 x_1}{dt^2} - \frac{d^2 \cos \alpha_1}{dt^2} \frac{Pl}{g}.$$

En projection sur Oy :

$$\frac{P}{g} \frac{d^2 y_1}{dt^2} - \frac{d^2 \sin \alpha_1}{dt^2} \frac{Pl}{g}.$$

Et enfin, en projection sur la tangente en M

$$(c) \quad -\frac{P}{g} \left\{ \left(\frac{d^2 x_1}{dt^2} + l \frac{d^2 \cos \alpha_1}{dt^2} \right) \cos \alpha + \left(\frac{d^2 y_1}{dt^2} + l \frac{d^2 \sin \alpha_1}{dt^2} \right) \sin \alpha \right\}.$$

La composante de la force élastique suivant la même tangente étant $En \left(\frac{ds}{d\sigma} - 1 \right)$ et celle de la pesanteur $P \cos \alpha$, l'équilibre de translation suivant sa direction s'exprime par l'équation :

$$(A) \quad \left\{ \begin{aligned} En \left(\frac{ds}{d\sigma} - 1 \right) &= P \cos \alpha - \frac{P}{g} \left\{ \left(\frac{d^2 x_1}{dt^2} + l \frac{d^2 \cos \alpha_1}{dt^2} \right) \cos \alpha + \right. \\ &+ \left. \left(\frac{d^2 y_1}{dt^2} + l \frac{d^2 \sin \alpha_1}{dt^2} \right) \sin \alpha \right\}. \\ \text{ou} \\ \frac{ds}{d\sigma} &= 1 + \frac{P}{En g} \left\{ \left(g - \frac{d^2 x_1}{dt^2} - l \frac{d^2 \cos \alpha_1}{dt^2} \right) \cos \alpha - \left(\frac{d^2 y_1}{dt^2} + l \frac{d^2 \sin \alpha_1}{dt^2} \right) \sin \alpha \right\}. \end{aligned} \right.$$

On obtient ainsi une première équation entre les fonctions inconnues x, y des variables indépendantes σ et t , dans laquelle il ne faudra pas oublier que

$$ds = \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} \cdot dx, \quad \cos \alpha = \frac{dx}{ds}, \quad \sin \alpha = \frac{dy}{ds}.$$

D'après la constitution physique de l'acier, $\frac{ds}{d\sigma}$ ne peut différer de l'unité de plus de $\frac{1}{4800}$, ou 0,00023, sans quoi il y aurait rupture. C'est pourquoi on peut, sans inconvénient, remplacer $\cos \alpha = \frac{dx}{ds} \frac{d\sigma}{ds}$ par $\frac{dy}{ds}$, et $\sin \alpha = \frac{dy}{ds} \frac{d\sigma}{ds}$ par $\frac{dy}{ds}$ dans l'équation (A) qui devient alors immédiatement intégrable par rapport à σ , et donne, en remarquant que pour $\sigma = 0$, on doit avoir constamment $x = 0, y = 0$.

$$(A') \quad s = \sigma + \frac{P}{En g} \left\{ \left(g - \frac{d^2 x_1}{dt^2} - l \frac{d^2 \cos \alpha_1}{dt^2} \right) x - \left(\frac{d^2 y_1}{dt^2} + l \frac{d^2 \sin \alpha_1}{dt^2} \right) y \right\}.$$

La seconde équation, propre à déterminer les inconnues de la question, s'ob-

tiendra en prenant les moments des forces d'inertie du poids P et des forces élastiques relatives à la section M , par rapport à l'axe perpendiculaire au plan xy passant par le point M .

Or, les forces d'inertie (a) et (b) du point m se composent chacune d'une partie variable avec sa position, et d'une partie constante $-m \frac{d^2 y_1}{dt^2}$ et $-m \frac{d^2 x_1}{dt^2}$.

Ces dernières forces d'inertie partielles pour tous les points du corps, auront pour résultantes respectives, passant par le centre de gravité G , $-\frac{P}{g} \frac{d^2 y_1}{dt^2}$, $-\frac{P}{g} \frac{d^2 x_1}{dt^2}$, dont la somme des moments, par rapport à M , ajoutée au moment de P sera :

$$(d) \quad -\frac{P}{g} \left[\left(g - \frac{d^2 x_1}{dt^2} \right) (l \sin \alpha_1 + y_1 - y) - \frac{d^2 y_1}{dt^2} (l \cos \alpha_1 + x_1 - x) \right]$$

Il reste maintenant à prendre les moments des parties variables des forces d'inertie (a) et (b).

La différence des ordonnées des points m et M est

$$r \sin (\alpha_1 \pm \delta) + y_1 - y.$$

et celle des abscisses

$$r \cos (\alpha_1 \pm \delta) + x_1 - x.$$

La somme des moments des parties variables sus-mentionnées est, par suite

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 \cos \alpha_1}{dt^2} \Sigma m r \cos (\pm \delta) \{ r \sin (\alpha_1 \pm \delta) + y_1 - y \} \\ & - \frac{d^2 \sin \alpha_1}{dt^2} \Sigma m r \cos (\pm \delta) \{ r \sin (\alpha_1 \pm \delta) + y_1 - y \} \\ & - \frac{d^2 \sin \alpha_1}{dt^2} \Sigma m r \sin (\pm \delta) \{ r \cos (\alpha_1 \pm \delta) + x_1 - x \} \\ & - \frac{d^2 \cos \alpha_1}{dt^2} \Sigma m r \sin (\pm \delta) \{ r \cos (\alpha_1 \pm \delta) + x_1 - x \} \end{aligned}$$

En développant $\sin (\alpha_1 \pm \delta)$ et $\cos (\alpha_1 \pm \delta)$, mettant en dehors du signe Σ tous les facteurs indépendants de m , r , δ , et remarquant qu'en vertu de la symétrie et de l'homogénéité ou de la distribution symétrique des masses, on a

$$\Sigma m r \sin (\pm \delta) = 0, \quad \Sigma m r^2 \sin (\pm \delta) = 0, \quad \Sigma m r^2 \sin (\pm \delta) \cos (\pm \delta) = 0.$$

On trouve

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 \cos \alpha_1}{dt^2} \{ \sin \alpha_1 \Sigma m r^2 + (y_1 - y) \Sigma m r \cos (\pm \delta) \} \\ & \frac{d^2 \sin \alpha_1}{dt^2} \{ -\cos \alpha_1 \Sigma m r^2 + (x_1 - x) \Sigma m r \cos (\pm \delta) \} \end{aligned}$$

Or

$$(e) \quad \begin{cases} \Sigma m r^2 = I \\ \Sigma m r \cos (\pm \delta) = \frac{P}{g} l \\ \frac{d^2 \cos \alpha_1}{dt^2} = -\sin \alpha_1 \frac{d^2 \alpha_1}{dt^2} - \cos \alpha_1 \left(\frac{d \alpha_1}{dt} \right)^2 \\ \frac{d^2 \sin \alpha_1}{dt^2} = \cos \alpha_1 \frac{d^2 \alpha_1}{dt^2} - \sin \alpha_1 \left(\frac{d \alpha_1}{dt} \right)^2 \end{cases}$$

de sorte que l'expression ci-dessus devient

$$(f) \quad -l \frac{d^2 x_1}{dt^2} + \frac{P}{g} l \left\{ \frac{d^3 \cos x_1}{dt^3} (y_1 - y) - \frac{d^3 \sin x_1}{dt^3} (x_1 - x) \right\}.$$

La somme des moments (d) et (f) doit être égale au moment des forces élastiques, $\frac{ds}{ds} \cdot \frac{E\mu}{\rho}$, que l'on peut prendre ici égal à $\frac{E\mu}{\rho}$ en raison de la petitesse de $\frac{ds - ds_0}{ds}$, on arrive ainsi à l'équation

$$(B) \quad \frac{E\mu}{\rho} = -l \frac{d^3 x_1}{dt^3} + \frac{P}{g} \left[l \left\{ (y_1 - y) \frac{d^3 \cos x_1}{dt^3} - (x_1 - x) \frac{d^3 \sin x_1}{dt^3} \right\} - \left(g - \frac{d^2 x_1}{dt^2} \right) (l \sin x_1 + y_1 - y) - \frac{d^2 y_1}{dt^2} (l \cos x_1 + x_1 - x) \right].$$

dans laquelle $\frac{1}{\rho} = \frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}$

M. de Saint-Venant a démontré que les équations de la forme (B) pouvaient s'intégrer, par rapport à x , à l'aide des fonctions elliptiques, quelle que soit la déformation de la lame ; mais l'intégrale à laquelle on arrive est trop compliquée pour que l'on puisse songer à continuer l'intégration par rapport à t ; c'est pourquoi nous abandonnerons le cas général pour ne nous occuper que de celui où les oscillations ne sont que de quelques degrés, de manière à pouvoir négliger x^2 devant l'unité.

Dans ces conditions, on a

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{1 + a^2} \quad dx = dx \text{ ou } s = x, \\ \frac{d^3 \cos x_1}{dt^3} &= -\sin x_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} - \cos x_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -a_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} - \frac{dx_1^3}{dt^3}, \\ \frac{d^3 \sin x_1}{dt^3} &= \cos x_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + \sin x_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = \frac{d^2 x_1}{dt^2} + a_1 \frac{dx_1^3}{dt^3}. \end{aligned}$$

On peut d'ailleurs considérer y , a et leurs dérivés par rapport à t comme étant du même ordre de grandeur que x , sauf vérification ultérieure ; de sorte qu'il est permis de négliger les termes qui les renferment au troisième degré ou au deuxième degré, respectivement devant la première puissance de chacun d'eux, ou devant x , l ,

En ayant égard à ces simplifications, l'équation (A') donne

$$x = a + \frac{P}{E\Omega g} \left(g - \frac{d^2 x_1}{dt^2} \right) x.$$

et pour le point A, en remplaçant dans le deuxième membre x par a .

$$(1) \quad x_1 = a_1 + \frac{P}{E\Omega g} \left(g - \frac{d^2 x_1}{dt^2} \right) a_1.$$

L'équation (B) conduit, de la même manière, à la suivante :

$$(2) \quad E\mu \frac{d^2 y}{dx^2} = - \left\{ I + \frac{Pl}{g}(x_1 - x) \right\} \frac{d^2 x_1}{dt^2} - \frac{P}{g} \left[\left(y - \frac{d^2 x_1}{dt^2} \right) (lx_1 + y_1 - y) + \right. \\ \left. + \frac{d^2 y_1}{dt^2} (l + x_1 - x) \right]$$

Si l'on pose

$$\sigma_1 \left(1 + \frac{P}{E\Omega} \right) = \epsilon, \quad \text{et} \quad x_1 - \sigma_1 \left(1 + \frac{P}{E\Omega} \right) = z.$$

représentera la longueur de la lame sous l'action du poids du pendule réduit au repos; et z la variation que cette longueur éprouvera pendant le mouvement.

L'équation (1) devient alors, eu égard à la petitesse de $\frac{P}{E\Omega}$

$$(3) \quad \frac{d^2 z}{dt^2} = - \frac{E\Omega g}{Pl} z.$$

Si l'on s'arrange de manière à ce que l'on n'altère pas la longueur de la lame, lorsque l'on écarte le pendule de la verticale pour le mettre en mouvement, en l'abandonnant ensuite à lui-même, condition à laquelle on cherche, autant que possible, à satisfaire dans l'application, la solution de l'équation (3)

correspond à $z = 0$ et $\frac{dz}{dt} = 0$; car cette même équation est celle du mouvement d'un point matériel de masse $\frac{P}{g}$, attiré vers un centre fixe proportionnellement à la distance z , et dans les conditions actuelles, ce point coïnciderait, à l'origine du temps, avec ce centre sans vitesse initiale.

L'équation (2) devient, par suite de l'invariabilité de x_1 avec le temps :

$$(4) \quad E\mu \frac{d^2 y}{dx^2} = - \left\{ I + \frac{Pl}{g}(x_1 - x) \right\} \frac{d^2 x_1}{dt^2} - \frac{P}{g} \left[g(lx_1 + y_1 - y) + \right. \\ \left. + \frac{d^2 y_1}{dt^2} (l + x_1 - x) \right]$$

L'intégrale par rapport à x de cette équation se trouve facilement, et en y faisant, ainsi que dans sa dérivée, $x = x_1$, $y = y_1$, $x = x_1$, on obtient deux équations différentielles du second ordre, par rapport au temps, entre les fonctions inconnues y_1 , x_1 , et l'on a ainsi tout ce qu'il faut pour résoudre le problème; mais dans ces équations, les différentielles, par rapport au temps, se trouvent en exposants réels ou imaginaires et sous des radicaux. Il ne faut donc pas songer à obtenir les intégrales qui représentent les fonctions inconnues, pour une lame d'une longueur quelconque.

Mais quand la lame est très-courte, par rapport à la longueur du pendule, comme cela a presque toujours lieu dans les horloges et les pendules, on peut négliger, dans une première approximation, $(x_1 - x)$ devant l , et $y_1 - y$ devant lx_1 . L'équation (4) se simplifie alors d'une manière notable et devient :

$$(4') \quad E\mu \frac{d^2 y}{dx^2} = - I \frac{d^2 x_1}{dt^2} - Plx_1 + \frac{Pl}{g} \frac{d^2 y_1}{dt^2}.$$

L'intégration, par rapport à x , en se rappelant les conditions $y = 0$, $\frac{dy}{dx} = 0$ pour $x = 0$, donne

$$(ii) \begin{cases} E_{\mu} \frac{dy}{dx} = E_{\mu} x = - \left\{ I \frac{d^2 \alpha}{dt^2} + Pl \alpha_1 + \frac{P}{g} \frac{d^2 y_1}{dt^2} \right\} x \\ E_{\mu} y = - \left\{ I \frac{d^2 \alpha}{dt^2} + \frac{P}{g} \alpha_1 - \frac{Pl}{g} \frac{d^2 y_1}{dt^2} \right\} \frac{x^2}{2}. \end{cases}$$

d'où

$$(6) \quad \begin{cases} y = \frac{\alpha x}{2} \\ y_1 = \frac{\alpha_1}{2} x_1 \end{cases}$$

puis

$$(7) \quad \frac{d^2 y_1}{dt^2} = \frac{x_1}{2} \frac{d^2 \alpha_1}{dt^2}$$

qui, dans les équations (4) et (5), doit être négligé devant $I \frac{d^2 \alpha_1}{dt^2}$, d'après le mode d'approximation adopté; la première formule (3) donne par suite, en y faisant $x = x_1 = \alpha_1 = \epsilon$.

$$(8) \quad \frac{d^2 \alpha_1}{dt^2} = - \alpha_1 \left(I + \frac{E_{\mu}}{g} \right);$$

d'où l'on déduit, en appelant α'_1 l'écart initial du pendule

$$(9) \quad \frac{d\alpha_1}{dt} = \sqrt{\frac{Pl + \frac{E_{\mu}}{g}}{I}} \sqrt{\alpha'^2_1 - \alpha_1^2}$$

$$dt = \sqrt{\frac{I}{Pl + \frac{E_{\mu}}{g}}} \frac{d\alpha_1}{\sqrt{\alpha'^2_1 - \alpha_1^2}}$$

$$(10) \quad t = \sqrt{\frac{I}{Pl + \frac{E_{\mu}}{g}}} \frac{\text{arc cos } \frac{\alpha_1}{\alpha'_1}}{\frac{\alpha'_1}{\alpha'_1}}$$

$$(11) \quad \alpha_1 = \alpha'_1 \cos \sqrt{\frac{Pl + \frac{E_{\mu}}{g}}{I}} t.$$

$$(12) \quad \frac{d\alpha_1}{dt} = \alpha'_1 \sqrt{\frac{Pl + \frac{E_{\mu}}{g}}{I}} \sin \sqrt{\frac{Pl + \frac{E_{\mu}}{g}}{I}} t.$$

puisque pour $t = 0$, on doit avoir $\alpha_1 = \alpha'_1$.

La durée d'une oscillation double aura, par suite, pour expression

$$(13) \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{Pl + \frac{E_{\mu}}{g}}}$$

tandis que si le pendule était tout simplement soutenu par son extrémité A, à l'aide d'un couteau, on aurait

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{Pl}}.$$

L'élasticité de la lame a donc pour effet de diminuer la durée des oscillations sans altérer leur isochronisme.

D'après les formules (6), (7), (8) et (12), y_1 , z_1 et leur dérivées, par rapport au temps, sont bien du même ordre de grandeur que z , comme nous l'avons supposé à priori.

Représentant par a la largeur de la lame, et par b son épaisseur, on sait que $\alpha = ab$, $\mu = \frac{1}{12} ab^3$, et comme pour l'acier très-fin, recuit à l'huile et trempé, on a $E = 3.10^{10}$, il vient $\frac{E\mu}{1} = \frac{1}{4} \frac{ab^3}{1} 10^{10}$, ou, en évaluant a , b , ϵ en millimètres

$$\frac{E\mu}{1} = 2,5 \frac{ab^3}{1}.$$

et par suite

$$(14) \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{Pl + 2,5 \frac{ab^3}{1}}}.$$

Dans les pendules d'appartement dont le balancier ne pèse pas plus de 500 grammes, la suspension ne se compose ordinairement que d'une seule lame; mais dans les horloges et certaines pendules, elle est formée de deux lames identiques, situées dans un plan perpendiculaire au plan d'oscillation, passant par l'axe de figure du pendule, et symétriquement disposées, par rapport à cet axe. Il est clair que pour ce dernier cas, la théorie est la même que celle qui vient d'être exposée; seulement α et μ devront représenter respectivement la somme des sections des deux lames et des moments d'inertie de ces sections évaluées, comme on l'a dit plus haut. Il résulte de là que la formule (14) subsiste encore pour le même cas, en γ supposant toutefois que a est la somme des largeurs des deux lames.

L'épaisseur des lames employées est toujours très-faible et n'atteint pas $\frac{1}{10}$ de millimètre, et comme, en général, $\frac{a}{1}$ est au plus égal à l'unité augmentée d'une très-petite fraction, le terme dû à l'élasticité qui, dans la formule (19), vient s'ajouter à Pl est très-petit, par rapport à cette quantité: on peut donc remplacer cette formule par la suivante, qui s'en déduit facilement:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{Pl} \left(1 - 2,5 \frac{ab^3}{Pl}\right)} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{Pl} \left(1 - 1,125 \frac{ab^3}{Pl}\right)}.$$

Or $2\pi \sqrt{\frac{I}{Pl}}$ n'est autre chose que la durée d'une oscillation qui serait exécutée par le pendule s'il était suspendu à l'aide d'un couteau, suivant l'axe projeté en A; on a ainsi, en appelant τ cette durée:

$$T = \tau \left(1 - 1,125 \frac{ab^3}{Pl}\right),$$

et la fraction dont l'élasticité diminue l'oscillation est $1,125 \frac{ab^3}{Pl}$.

Soient, par exemple, $a = 5^{\text{mm}}$, $\epsilon = 2^{\text{mm}}$, $b = 0^{\text{mm}} 1$, $P = 0^{\text{kg}} 5$, $l = 0^{\text{m}} 3$. On trouve, pour cette fraction 0,02 environ, ce qui est insignifiant, malgré les conditions exceptionnelles dans lesquelles nous nous sommes placés, et que nous avons

choisies à dessein, afin de bien faire comprendre le rôle que joue l'élasticité dans les lois du mouvement pendulaire. On peut donc dire que l'élasticité, pour une lame très-courte, non-seulement n'altère pas l'isochronisme des oscillations du pendule, mais encore que, dans la plupart des cas, ses effets sont négligeables, par rapport à ceux de la pesanteur agissant sur la masse mobile.

D'après la formule (14), en raccourcissant la lame, on peut réduire indéfiniment et jusqu'à zéro, la durée des oscillations du pendule; mais pour la modifier d'une manière sensible, il faudrait opérer sur des longueurs de lames d'une petitesse comparable à celle de leur épaisseur; de sorte que ce mode de réglage devient complètement illusoire au-delà d'une certaine limite, passée laquelle les diverses dispositions imaginées par les horlogers, basées sur ce principe, ne peuvent plus fonctionner d'une manière satisfaisante.

Mais, en raison de la petitesse de $\frac{E\mu}{g}$ par rapport à Pl , on peut se demander si, en négligeant $x_1 - x$, et $y_1 - y$, devant l et lx_1 , on n'a pas commis une erreur au moins égale à la fraction qui représente l'influence de l'élasticité sur la durée des oscillations. C'est ce que nous allons chercher à connaître, en conservant, dans le calcul de x_1 , la première puissance de la longueur de la lame.

Des équations (5) et (6) on déduit

$$\frac{y}{y_1} = \frac{x^3}{x_1^3}$$

$$y_1 = \frac{x_1}{2} x_1$$

$$y_1 - y = \frac{x_1}{2} \left(\frac{x_1^3 - x^3}{x} \right) = \frac{x_1}{2} (x_1 - x) \left(1 + \frac{x}{x_1} \right) = x_1 (x_1 - x),$$

en négligeant le carré de $x_1 - x$. De plus

$$\frac{d^2 y_1}{dt^2} = \frac{x_1}{2} \cdot \frac{d^2 x_1}{dt^2}.$$

En substituant ces valeurs dans le second membre de l'équation (4), on ne commettra qu'une erreur du deuxième ordre en x et x_1 , et l'on obtiendra

$$E\mu \frac{dy^3}{dx^3} = - \left(l + \frac{Pl}{g} \left(\frac{3}{2} x_1 - x \right) \right) \frac{d^2 x_1}{dt^2} - P x_1 \left\{ l + x_1 - x \right\},$$

puis, en intégrant par rapport à x ,

$$E\mu \frac{dy}{dx} = E\mu x = - \left(l + \frac{Pl}{2g} (3 x_1 - x) \right) x \frac{d^2 x_1}{dt^2} - P x_1 x \left\{ l + x_1 - \frac{x}{2} \right\};$$

en faisant, dans cette dernière équation, $x = x_1 = 1$;

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = - \frac{l + \frac{Pl}{g}}{P \left(l + \frac{1}{2} \right) + \frac{E\mu}{2}} x_1.$$

et les oscillations sont encore isochrones; seulement leur durée sera un peu modifiée, et aura pour expression :

$$(15) \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{I + \frac{Pl_h}{g}}{P \left(l + \frac{e}{2} \right) + \frac{E_p}{g}}}$$

Dans la plupart des cas, e et $\frac{E_p}{g}$ seront très-petits, et alors on pourra prendre approximativement

$$(16) \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{Pl}} \left\{ 1 + \frac{e}{2} \left(\frac{2Pl - Ig}{gl} \right) - \frac{E_p}{2Plg} \right\},$$

et comme $2Pl > Ig$, le terme en e est positif. On voit ainsi de quelle manière les effets de l'élasticité viennent s'ajouter à ceux qui, dans un pendule ordinaire, résulteraient d'une augmentation que l'on aurait fait subir à sa longueur.

Soit, par exemple, $Ig = \frac{7}{6} Pl$, on a

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{Pl}} \left\{ 1 + \frac{5}{14} e - \frac{E_p}{2Plg} \right\},$$

et en prenant les données numériques ci-dessus, $\frac{5}{14} e = 0,002$, $\frac{E_p}{2Plg} = 0,02$; l'influence de l'élasticité, quoique très-faible, est donc de beaucoup supérieure à celle du terme complémentaire en e que nous avons introduit dans notre mode d'approximation.

Nous terminerons en faisant observer que les conséquences auxquelles conduit la formule (15) sont les mêmes que celles qui sont relatives à la formule (13).

